2.17) $T(P) = P + (1-x)P'$

a) como podría calcular los transformados de una base, como la canónica de $\mathbb{R}_3[x]$ por ejemplo, entonces por teorema fundamental de las TL, la transformación queda bien determinada.

Pruebo que es TL:

(1) Tomo v_1 y $v_2 \in \mathbb{R}_3[x]$: $v_1 = P \wedge v_2 = Q$

$T(v_1) = P + (1-x)P'$, $T(v_2) = Q + (1-x)Q'$.

$\rightarrow T(v_1+v_2) = (P+Q) + (1-x)(P+Q)' = P + Q + (1-x).P' + (1-x).Q' =$

$= (P + (1-x)P') + (Q + (1-x)Q') = T(v_1) + T(v_2)$ ✓

(2) Tomo $v_1 \in \mathbb{R}_3[x]$: $v_1 = P$, $\lambda \in K$

$T(\lambda v_1) = (\lambda P) + (1-x)(\lambda P)' = \lambda(P + (1-x).P') = \lambda.T(v_1)$ ✓

Usé Prop. de derivadas.

b) $P + (1-x)P' = 0$

Un genérico de $P \in \mathbb{R}_3[x]$ es $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ y su derivada: $P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$:

$\rightarrow (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) + (1-x).(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow (a_0 + \cancel{a_1x} + a_2x^2 + a_3x^3) + (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 - \cancel{a_1x} - 2a_2x^2 - 3a_3x^3) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow (a_0+a_1) + (2a_2)x + (a_2 + 3a_3 - 2a_2)x^2 + (a_3 - 3a_3)x^3 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow (a_0+a_1) + (2a_2)x + (-a_2 + 3a_3)x^2 + (-2a_3)x^3 = 0$

Como un polinomio es nulo si sus coef. lo son:

$$a_0 + a_1 = 0 \to a_0 = -a_1$$
$$2a_2 = 0 \to a_2 = 0$$
$$-a_2 + 3a_3 = 0 \to a_2 = 0$$
$$-2a_3 = 0 \to a_3 = 0$$

$\to$ en el genérico, ya que $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-a_1, a_1, 0, 0)$

$p(x) = -a_1 + a_1 x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \to p(x) = a_1 \cdot (-1 + x)$

Entonces $Nu(T) = \langle -1+x \rangle$ que es base ya que es un solo elemento.

$\to \boxed{B_{Nu(T)} = \{(-1+x)\}}$

c) Busco los transformados de los canónicos de $\mathbb{R}_3[x]$, es decir de $B = \{1, x, x^2, x^3\}$

$T(1) = \underline{1}$ I

$T(x) = x + (1-x) \cdot 1 \to T(x) = \underline{1}$ II

$T(x^2) = x^2 + (1-x) \cdot 2x \to T(x^2) = x^2 + 2x - 2x^2 = \underline{-x^2 + 2x}$.

$T(x^3) = x^3 + (1-x) \cdot 3x^2 \to T(x^3) = x^3 + 3x^2 - 3x^3 = \underline{-2x^3 + 3x^2}$

Como I y II son iguales, una base de la Imag. es:

$\boxed{B_{Im(T)} = \{1, -x^2+2x, -2x^3+3x^2\}}$ ya que son LI por ser de distinto grado.

Ver si se cumple el teorema de la dimensión con lo calculado:

$$\underbrace{\dim(\mathbb{R}_3[x])}_{=4} = \underbrace{\dim(Im(T))}_{=3} + \underbrace{\dim(Nu(T))}_{=1} \to 4 = 4 \checkmark$$

d) $\cdot\ \underline{1+x+x^2-x^3 = \alpha_1.(1) + \alpha_2.(-x^2+2x) + \alpha_3.(-2x^3+3x^2)}$

lo pongo como CL de la base de Im(T)
y veo si hay $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ que cumplan.

$1+x+x^2-x^3 = (\alpha_1) + (2\alpha_2)x + (-\alpha_2+3\alpha_3)x^2 + (-2\alpha_3)x^3.$

Entonces, igualando coeficientes:

$$\begin{cases} \underline{1 = \alpha_1} \\ 1 = 2\alpha_2 \to \underline{\alpha_2 = 1/2} \\ 1 = -\alpha_2+3\alpha_3 \to 1 = -\frac{1}{2} + 3\alpha_3 \to 1 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \to 1 = 1 \checkmark \\ -1 = -2\alpha_3 \to \underline{\alpha_3 = 1/2} \end{cases}$$

Por lo tanto se puede obtener q con $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = (1, 1/2, 1/2)$, por lo tanto $\underline{q(x) \in Im(T)}$

$\cdot\ T(P) = q \to P + (1-x)P' = q \to a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+(1-x).(a_1+2a_2x+3a_3x^2) = 1+x+x^2-x^3 \to$

$\to (a_0+a_1) + (2a_2)x + (-a_2+3a_3)x^2 + (-2a_3)x^3 = 1+x+x^2-x^3.$

Entonces igualando coef.:

$a_0+a_1 = 1 \to \boxed{a_0 = 1-a_1}$

$2a_2 = 1 \to \boxed{a_2 = 1/2}$

$-a_2+3a_3 = 1 \to 3a_3 = 1+1/2 \to \boxed{a_3 = \frac{1}{2}}$

$-2a_3 = -1 \to \boxed{a_3 = 1/2}$

Los $\bar{X}$ que cumplan sean de la forma:

~~$(a_0, a_1, a_2, a_3) =$~~

Soluciones de $T(P) = q$

$(a_0,a_1,a_2,a_3) = (1-a_1, a_1, 1/2, 1/2) = \boxed{a_1.(-1,1,0,0) + (1,0,1/2,1/2)}$